ЕСЕПТЕР

175. Жоғарыда қарастырылған үшінші мысалдың мазмұнына сәйкес $Z=2(X+Y)+1$ және $Z=2Y^2-1$ кездейсоқ шамалардың үлестірім кестелерін жаз.

176. Тиын үш рет лақтырылған. X – елтаңба пайда болу саны. Y – цифрдің пайда болу саны. X+Y кездейсоқ шамалардың үлестірім заңдарын жаз.

177. X кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

x	0	1	2	3
q	0,1	0,3	0,4	0,2

$y=\sin\frac{\pi}{2}x+1$ функциясының үлестірім заңын жазыңыз.

178. (X,Y) жүйесі үлестірім кестесімен берілген:

X \ Y	-2	-1	0	1
-1	0,01	0,02	0,05	0,03
0	0,03	0,24	0,15	0,06
1	0,06	0,09	0,16	0,10

$Z=X+Y$, $Z=X\cdot Y$кездейсоқ шамаларының үлестірім кестелерін жазыңыз.

§ 5. Үлкен сандар заңы

Үлкен сандар заңы бірнеше теоремалар арқылы беріледі. Бұл теоремаларда (С.Чебышев, Бернулли; Пуассон теоремалары) өте көп кездейсоқ факторлардың жиынтық әсері, кездейсоқтықтан тәуелсіз нәтижелер алудың шарттары беріледі.

1. Чебышев теңсіздігі

Егер X кездейсоқ шамасының дисперсиясы бар болса, онда мына теңсіздіктер орындалады:

$$P(|X-M(X)|\geq\varepsilon)\geq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2.5.1)$$

$$P(|X-M(X)|\leq\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \qquad (2.5.2)$$

мұндағы $\varepsilon > 0$.

Бұл теңсіздіктер кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуын бағалайды.

1-мысал. Дискретті кездейсоқ шама мынадай үлестірім заңымен берілген:

X	-1	0	2	4	6
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

1. Мына $|X-M(X)|<5$ теңсіздіктің орындалуының ықтималдығын табыңыз.

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)|<5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Әуелі математикалық үміт пен дисперсиясын табалық.
$M(X) = -0{,}2 + 0{,}6 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}9.$

Енді дисперсиясын табу үшін X^2-тың үлестірім заңын жазамыз:

X^2	1	0	4	16	36
P	0,2	0,4	0,3	0,05	0,05

Сонда:

$M(X^2) = 0{,}2 + 1{,}2 + 0{,}8 + 1{,}8 = 4.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4 - 0{,}81 = 3{,}19.$

1. Енді $|X-0{,}9|<5$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын табу үшін осы теңсіздікті қанағатандыратын X-тің мәндерін анықтау қажет. Берілген үлестірім кестесінен бұл теңсіздікті кездейсоқ шаманың $x=-1$, $x=0$, $x=2$, $x=4$ мәндері қанағаттандыратынына көз жеткізуге болады. Олай болса:

$P(|X-0{,}9| < 5) = P(X = -1) + P(X = 0) + P(X = 2) + P(X = 4) =$ $0{,}2+0{,}4+0{,}3+0{,}05=0{,}95.$

Сонымен:

$$P(|X-0{,}9|<5)=0{,}95$$

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-0{,}9|<5$ теңсіздігінің орындалуын бағалайық:

$$P(|X-0{,}9|<5)\geq 1-\frac{3{,}19}{25}=0{,}8725$$

яғни

$$P(|X-0{,}9|<5)\geq 0{,}8725.$$

Сөйтіп Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)| \leq 5$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын төменнен бағаладық, яғни $|x-0,9| \leq 5$ теңсіздігі кем дегенде 0,8724 ықтималдықпен орындалады. Бұл тұжырымның құндылығы есептер шығарған кезде $|x-M(x)| < \varepsilon$ ($\varepsilon>0$] теңсіздігінің орындалуының дәл ықтималдығын табу мүмкін болмаған жағдайларда оның ықтималдығын төменнен бағалауға мүмкіндік береді.

2-мысал. Жарық беруші торапқа 20 электршам параллель қосылған. Т уақыт ішінде әрбір шамның жарық беру ықтималдығы 0,8. Чебышев теңсіздігін пайдаланып Т уақыт аралығында жарық беруші электршамдар саны мен олардың арифметикалық орташа мәндерінің (математикалық үміті) айырмасының абсолюттік шамасының ықтималдығын бағалаңыз. Осы айырма: 1) төрттен кем болса; 2) төрттен кем болмаса.

Шешуі: Белгілі бір Т уақытында жарық беріп тұрған электршамдардың саны кездейсоқ шама. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестірім заңымен берілген. Есептің шарты бойынша n=20, p=0,8, q=0,2.

Сондықтан:

$M(X) = 20 \cdot 0,8 = 16,\ D(X) = 16 \cdot 0,2 = 3,2.$

Енді Чебышев теңсіздігін пайдаланамыз.

1. $$P(|X-16|<4) \geq 1-\frac{3,2}{16}=0,8$$

2. $$P(|X-16| \geq 4) \leq \frac{3,2}{16}=0,2$$

Сонымен:

$$P(|X-16|<4) \geq 0,8 \quad P(|X-16| \geq 4) \leq 0,2$$

3-мысал. Зауыт өнімдерінің 75 процентін жоғарғы сортпен шығарады. Шығарылған 100 000 бұйымдардың ішінде жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың саны осы жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдардың математикалық үмітінен айырмасының абсолют шамасы 1000 данадан артық болмауының ықтималдығын бағалаңыз.

Шешуі: Жоғарғы сортпен шығарылған бұйымдар саны кездейсоқ шама. Оны X арқылы белгілейік. Бұл кездейсоқ шама биномдық үлестіріммен берілген. M(X) осы кездейсоқ шаманың математикалық үміті. Есептің шарты бойынша n = 100 000, p=0,75, q=0,25.

Сонда:

$M(X) = 100\ 000 \cdot 0{,}75 = 75000,\ \ D(X) = 18750$

Осыдан:

$$P(|X - M(X)| < 1000) \geq 1 - \frac{18750}{10^6} = 0{,}9812,$$

яғни

$$P(|X - M(X)| < 1000) \geq 0{,}98125.$$

ЕСЕПТЕР

179. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім заңдарымен берілген:

x	1	2
p	0,8	0,2

Мына $|X-M(X)|<1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын табыңыз.

2. Чебышев теңсіздігін пайдаланып $|X-M(X)|<1$ теңсіздігінің орындалуының ықтималдығын бағалаңыз.

180. Детальдің орташа ұзындығы а = 50 см, ал дисперсиясы $\sigma^2 = 0{,}1$. Чебышев теңсіздігін пайдаланып алынған кез келген детальдің ұзындығы 49,5 сантиметрден 50,5 см аралығында болатынының ықтималдығын бағалаңыз.

181. Кез келген кездейсоқ шаманың өзінің математикалық үмітінен ауытқуының абсолют шамасы үш орташа квадраттық ауытқудан артпауының ықтималдығын бағалаңыз.

182. Зауыттың жарамсыз радиошам жасап шығару ықтималдығы 0,25. Бір партияда 1000 радиошам болса, жарамсыз радиошамдардың саны 250-ден ауытқуының абсолют шамасы 40-тан кем болуының ықтималдығын бағалаңыз.

183. Дискретті кездейсоқ шама үлестірім кестесімен берілген:

x	0,3	0,6
p	0,2	0,8

$|X-M(X)|<0{,}2$ теңсіздігінің орындалу ықтималдығын бағалаңыз.

184. Елді мекенде судың тәулік шығыны кездейсоқ шама. Оның орташа квадраттық ауытқуы 10 000 л. Осы елді мекенде бір күн ішінде су шығынының математикалық үміттен ауытқуының абсолют шамасы 25 000 литрден кем болмауының ықтималдығын бағалаңыз.